卡尔曼滤波公式推导

在离散状态空间表示下，加入噪声的系统可以有如下表示：

$$\begin{cases} X_k = AX_{k-1} + Bu_k + w_k \\ Z_k = HX_k + v_k \end{cases}$$

其中$w_k \sim \mathrm{N}(0, Q)$为过程噪声，$v_k \sim \mathrm{N}(0, R)$为测量噪声，$Q$、$R$分别为$w_k$、$v_k$的协方差矩阵

> 提醒：协方差矩阵是对称矩阵，其转置和自身相等

卡尔曼滤波是一种递归估计的思想，即我们假设在$k-1$时刻得到了系统状态X_{k-1}的最优估计值$\hat{X}_{k-1}$，我们如何推导出k时刻的系统状态X_k的最优估计值$\hat{X}_k$

定义$\hat{X}_{k-1}$为$k-1$时刻的后验估计值（最优估计值），则我们可以得到k时刻的两种系统状态的估计值

$$\hat{X}_k^- = A\hat{X}_{k-1} + Bu_k$$
$$\hat{X}_{kmea} = H^{-1}Z_k$$

其中$\hat{X}_k^-$称为k时刻的先验估计，它忽略了系统的过程噪声，$\hat{X}_{kmea}$称为k时刻的测量估计，它忽略了系统的测量噪声

现在我们有了两个关于X_k的估计值，我们需要将其组合起来获取最优的那个估计值，即选取合适的G_k，使得

$$\hat{X}_k = \hat{X}_k^- + G_k(\hat{X}_{kmea} - \hat{X}_k^-)$$

更趋近于X_k

我们令$K_k = G_kH$为卡尔曼增益矩阵，同时带入$\hat{X}_{kmea} = H^{-1}Z_k$，有

$$\hat{X}_k = \hat{X}_k^- + K_k(Z_k - H\hat{X}_k^-)$$

定义后验误差

$$\hat{e}_k = X_k - \hat{X}_k$$

显然有$\hat{e}_k \sim \mathrm{N}(0, \hat{P}_k)$，$\hat{P}_k$为后验误差的协方差矩阵，其形式如下

$$\hat{P}_k = \begin{bmatrix} \sigma e_1^2 & \sigma e_1 e_2 & \cdots & \sigma e_1 e_n \\ \sigma e_2 e_1 & \sigma e_2^2 & \cdots & \sigma e_2 e_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma e_n e_1 & \sigma e_n e_2 & \cdots & \sigma e_n^2 \end{bmatrix}$$

由方差的定义我们可以知道，协方差矩阵对角线之外的协方差项仅表示误差分量的变化方向趋势，只有对角线上的方差项表示误差关于某一个值的变化程度

所以若我们想要$\hat{X}_k$尽可能趋近于X_k，即有后验误差的协方差矩阵$\hat{P}_k$对角线上的方差项之和尽可能小，即$\mathrm{tr}(\hat{P}_k)$最小

由协方差矩阵的计算方法我们可以得到（下式中的$\mathrm{E}()$表示期望）

$$\begin{aligned} \hat{P}_k &= \mathrm{E}(\hat{e}_k\hat{e}_k^T) \\ &= \mathrm{E}((X_k - \hat{X}_k)(X_k - \hat{X}_k)^T) \\ &= \mathrm{E}((X_k - \hat{X}_k^- - K_k(Z_k - H\hat{X}_k^-))(X_k - \hat{X}_k^- - K_k(Z_k - H\hat{X}_k^-))^T) \\ &= \mathrm{E}((X_k - \hat{X}_k^- - K_k(HX_k + v_k - H\hat{X}_k^-)(X_k - \hat{X}_k^- - K_k(HX_k + v_k - H\hat{X}_k^-)^T) \\ &= \mathrm{E}(((I - K_kH)(X_k - \hat{X}_k^-) - K_kv_k)((I - K_kH)(X_k - \hat{X}_k^-) - K_kv_k)^T) \end{aligned}$$

定义先验误差

$$\hat{e}_k^- = X_k - \hat{X}_k^-$$

有

$$
\begin{aligned}
\hat{P}_k &= \mathrm{E}(((I-K_kH)\hat{e}_k^- - K_kv_k)((I-K_kH)\hat{e}_k^- - K_kv_k)^T) \\
&= \mathrm{E}(((I-K_kH)\hat{e}_k^- - K_kv_k)((\hat{e}_k^-)^T(I-H^TK_k^T) - v_k^TK_k^T)) \\
&= \mathrm{E}((I-K_kH)\hat{e}_k^-(\hat{e}_k^-)^T(I-H^TK_k^T) - K_kv_k(\hat{e}_k^-)^T(I-H^TK_k^T) - (I-K_kH)\hat{e}_k^-v_k^TK_k^T + K_kv_kv_k^TK_k^T) \\
&= (I-K_kH)\mathrm{E}(\hat{e}_k^-(\hat{e}_k^-)^T)(I-H^TK_k^T) - K_k\mathrm{E}(v_k(\hat{e}_k^-)^T)(I-H^TK_k^T) - (I-K_kH)\mathrm{E}(\hat{e}_k^-v_k^T)K_k^T + K_k\mathrm{E}(v_kv_k^T)K_k^T
\end{aligned}
$$

在前面我们定义了后验误差的协方差矩阵$\hat{P}_k = \mathrm{E}(\hat{e}_k\hat{e}_k^T)$，这里我们定义先验误差的协方差矩阵

$$
\hat{P_k^-} = \mathrm{E}(\hat{e}_k^-(\hat{e}_k^-)^T)
$$

同时我们知道v_k、$(\hat{e}_k^-)^T$互相独立，$\hat{e}_k^-$、v_k^T互相独立，又有$\mathrm{E}(v_k) = \mathrm{E}(v_k^T) = 0$所以有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(v_k(\hat{e}_k^-)^T) = \mathrm{E}(v_k)\mathrm{E}((\hat{e}_k^-)^T) = 0 \\
\mathrm{E}(\hat{e}_k^-v_k^T) = \mathrm{E}(\hat{e}_k^-)\mathrm{E}(v_k^T) = 0
\end{aligned}
$$

此外，有

$$
\mathrm{E}(v_kv_k^T) = R
$$

则有

$$
\begin{aligned}
\hat{P}_k &= (I-K_kH)\hat{P_k^-}(I-H^TK_k^T) + K_kRK_k^T \\
&= (\hat{P_k^-} - K_kH\hat{P_k^-})(I-H^TK_k^T) + K_kRK_k^T \\
&= \hat{P_k^-} - K_kH\hat{P_k^-} - \hat{P_k^-}H^TK_k^T + K_kH\hat{P_k^-}H^TK_k^T + K_kRK_k^T
\end{aligned}
$$

我们计算$\mathrm{tr}(\hat{P}_k)$

$$
\mathrm{tr}(\hat{P}_k) = \mathrm{tr}(\hat{P_k^-}) - \mathrm{tr}(K_kH\hat{P_k^-}) - \mathrm{tr}(\hat{P_k^-}H^TK_k^T) + \mathrm{tr}(K_kH\hat{P_k^-}H^TK_k^T) + \mathrm{tr}(K_kRK_k^T)
$$

我们考虑$K_kH\hat{P_k^-}$和$\hat{P_k^-}H^TK_k^T$两个矩阵

$$
(\hat{P_k^-}H^TK_k^T)^T = K_kH(\hat{P_k^-})^T = K_kH\hat{P_k^-}
$$

所以上面两个矩阵互为转置，那么其秩就是一样的，所以有

$$
\mathrm{tr}(\hat{P}_k) = \mathrm{tr}(\hat{P_k^-}) - 2\mathrm{tr}(K_kH\hat{P_k^-}) + \mathrm{tr}(K_kH\hat{P_k^-}H^TK_k^T) + \mathrm{tr}(K_kRK_k^T)
$$

要使$\mathrm{tr}(\hat{P}_k)$最小，我们让$\mathrm{tr}(\hat{P}_k)$对K_k求导

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathrm{tr}(\hat{P}_k)}{\mathrm{d}K_k} &= \frac{\mathrm{d}(\mathrm{tr}(\hat{P_k^-}) - 2\mathrm{tr}(K_kH\hat{P_k^-}) + \mathrm{tr}(K_kH\hat{P_k^-}H^TK_k^T) + \mathrm{tr}(K_kRK_k^T))}{\mathrm{d}K_k} \\
&= \frac{\mathrm{d}\mathrm{tr}(\hat{P_k^-})}{\mathrm{d}K_k} - 2\frac{\mathrm{d}\mathrm{tr}(K_kH\hat{P_k^-})}{\mathrm{d}K_k} + \frac{\mathrm{d}\mathrm{tr}(K_kH\hat{P_k^-}H^TK_k^T)}{\mathrm{d}K_k} + \frac{\mathrm{d}\mathrm{tr}(K_kRK_k^T)}{\mathrm{d}K_k}
\end{aligned}
$$

现在讨论每一项

显然$\mathrm{tr}(\hat{P_k^-})$跟K_k没有任何关系，所以第一项为0

对于后面几项，我们有以下关于矩阵的迹的求导公式

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathrm{tr}(AB)}{\mathrm{d}A} = \frac{\mathrm{d}\mathrm{tr}(BA)}{\mathrm{d}A} = B^T \\
\frac{\mathrm{d}\mathrm{tr}(ABA^T)}{\mathrm{d}A} = AB + AB^T
\end{aligned}
$$

故有

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathrm{tr}(\hat{P}_k)}{\mathrm{d}K_k} &= -2(H\hat{P_k^-})^T + K_kH\hat{P_k^-}H^T + K_k(H\hat{P_k^-}H^T)^T + K_kR + K_kR^T \\
&= -2\hat{P_k^-}H^T + 2K_kH\hat{P_k^-}H^T + 2K_kR
\end{aligned}
$$

我们令

$$
\frac{\mathrm{d}\mathrm{tr}(\hat{P}_k)}{\mathrm{d}K_k} = 0
$$

有

$$
\begin{aligned}
& -2\hat{P_k^-}H^T+2K_kH\hat{P_k^-}H^T+2K_kR=0 \\
\Rightarrow \quad & K_k(H\hat{P_k^-}H^T+R)=\hat{P_k^-}H^T \\
\Rightarrow \quad & K_k=\frac{\hat{P_k^-}H^T}{H\hat{P_k^-}H^T+R}
\end{aligned}
$$

至此，我们得到了卡尔曼增益矩阵的表示方法，这能让我们的后验估计最接近真实值

但卡尔曼增益矩阵中的$\hat{P_k^-}$项仍然未知，所以我们现在计算这一项

由定义知

$$
\begin{aligned}
\hat{P_k^-} &= \mathrm{E}(\hat{e}_k^-(\hat{e}_k^-)^T) \\
&= \mathrm{E}((X_k-\hat{X}_k^-)(X_k-\hat{X}_k^-)^T) \\
&= \mathrm{E}((AX_{k-1}+Bu_k+w_k-A\hat{X}_{k-1}+Bu_k)(AX_{k-1}+Bu_k+w_k-A\hat{X}_{k-1}+Bu_k)^T) \\
&= \mathrm{E}((A\hat{e}_{k-1}+w_k)(A\hat{e}_{k-1}+w_k)^T) \\
&= \mathrm{E}((A\hat{e}_{k-1}+w_k)(w_k^T+\hat{e}_{k-1}^TA^T)) \\
&= \mathrm{E}(A\hat{e}_{k-1}w_k^T+A\hat{e}_{k-1}\hat{e}_{k-1}^TA^T+w_kw_k^T+w_k\hat{e}_{k-1}^TA^T) \\
&= A\mathrm{E}(\hat{e}_{k-1}w_k^T)+A\mathrm{E}(\hat{e}_{k-1}\hat{e}_{k-1}^T)A^T+\mathrm{E}(w_kw_k^T)+\mathrm{E}(w_k\hat{e}_{k-1}^T)A^T
\end{aligned}
$$

我们同样是分开看每一项，显然$\hat{e}_{k-1}$、w_k^T互相独立，w_k、$\hat{e}_{k-1}^T$互相独立，又有$\mathrm{E}(w_k^T)=\mathrm{E}(w_k)=0$，所以有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(\hat{e}_{k-1}w_k^T)=\mathrm{E}(\hat{e}_{k-1})\mathrm{E}(w_k^T)=0 \\
\mathrm{E}(w_k\hat{e}_{k-1}^T)=\mathrm{E}(w_k)\mathrm{E}(\hat{e}_{k-1}^T)=0
\end{aligned}
$$

此外，有

$$
\mathrm{E}(w_kw_k^T)=Q
$$

$$
\mathrm{E}(\hat{e}_{k-1}\hat{e}_{k-1}^T)=\hat{P}_{k-1}
$$

则有

$$
\hat{P_k^-}=A\hat{P}_{k-1}A^T+Q
$$

下面我们计算后验误差的协方差矩阵$\hat{P}_k$

$$
\begin{aligned}
\hat{P}_k &= \hat{P_k^-}-K_kH\hat{P_k^-}-\hat{P_k^-}H^TK_k^T+K_kH\hat{P_k^-}H^TK_k^T+K_kRK_k^T \\
&= (I-K_kH)\hat{P_k^-}-(\hat{P_k^-}H^T-K_kH\hat{P_k^-}H^T-K_kR)K_k^T \\
&= (I-K_kH)\hat{P_k^-}-(\hat{P_k^-}H^T-K_k(H\hat{P_k^-}H^T+R))K_k^T \\
&= (I-K_kH)\hat{P_k^-}-(\hat{P_k^-}H^T-\hat{P_k^-}H^T)K_k^T \\
&= (I-K_kH)\hat{P_k^-}
\end{aligned}
$$

至此，我们得到了卡尔曼的五个公式，其使用顺序如下

初始状态$k=0$的情况下，我们有给定的初始值$\hat{X}_0$与初始后验误差协方差矩阵$\hat{P}_0$，这两个初始值矩阵一般为零，还有设定的过程噪声的协方差矩阵Q，测量噪声的协方差矩阵R，这两个矩阵需要我们给定一个初始值

当$k\geqslant 1$时，有

第一步，计算此时的先验估计

$$
\hat{X}_k^-=A\hat{X}_{k-1}+Bu_k
$$

第二步，计算此时先验误差的协方差矩阵

$$
\hat{P_k^-}=A\hat{P}_{k-1}A^T+Q
$$

第三步，计算此时的卡尔曼增益

$$K_k = \frac{\hat{P_k^-} H^T}{H \hat{P_k^-} H^T + R}$$

第四步，计算此时的后验估计（此时刻系统状态的最优估计）

$$\hat{X}_k = \hat{X}_k^- + K_k (Z_k - H \hat{X}_k^-)$$

第五步，计算此时后验误差的协方差矩阵

$$\hat{P}_k = (I - K_k H) \hat{P_k^-}$$